多重デデキント和の相互法則の一般化(解析的整数論とその周辺)

浅野, 雅博

数理解析研究所講究録
1511巻 2006年 29-37

多重デデキント和の相互法則の一般化

名古屋大学多元数理　　浅野 雅博 (Masahiro Asano)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

本論文では Zagier[6] が用いた多重デデキント和の一般化を導出し，その相互法則を考えるのが目的である．まずその前にデデキント和から簡潔に説明していくことにする．

1 導入

$h,k\in\mathbb{N},(h,k)=1$ とする．この時デデキント和 $s(h,k)$ は以下で定義される和である．

$$s(h,k):=\sum_{j\,(\mathrm{mod}\,k)}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{jh}{k}\right)\right).$$

ここで $((x))$ は以下で表される関数である．

$$((x))=\begin{cases}x-[x]-\frac{1}{2} & (x\notin\mathbb{Z}),\\ 0 & (x\in\mathbb{Z}).\end{cases}$$

そして Dedekind はその相互法則を以下の様に得ている．

$$s(h,k)+s(k,h)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{k}{h}+\frac{1}{hk}+\frac{h}{k}\right).$$

次に多重デデキント和について述べる．様々な多重デデキント和が Berndt, Carlitz, Zagier, Egami, Bayad により研究されている．Zagier は

$$s(h,k)=\frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{k-1}\cot\left(\frac{\pi j}{k}\right)\cot\left(\frac{\pi hj}{k}\right)$$

と表されることに注目し, 多重デデキント和を 2 つずつ互いに素な自然数 $p, a_1, \cdots, a_n$ (n: even) に対し,

$$\begin{aligned} &d(p; a_1, \cdots, a_n) \\ &:= (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \cot\left(\frac{\pi k a_1}{p}\right) \cdots \cot\left(\frac{\pi k a_n}{p}\right) \end{aligned}$$

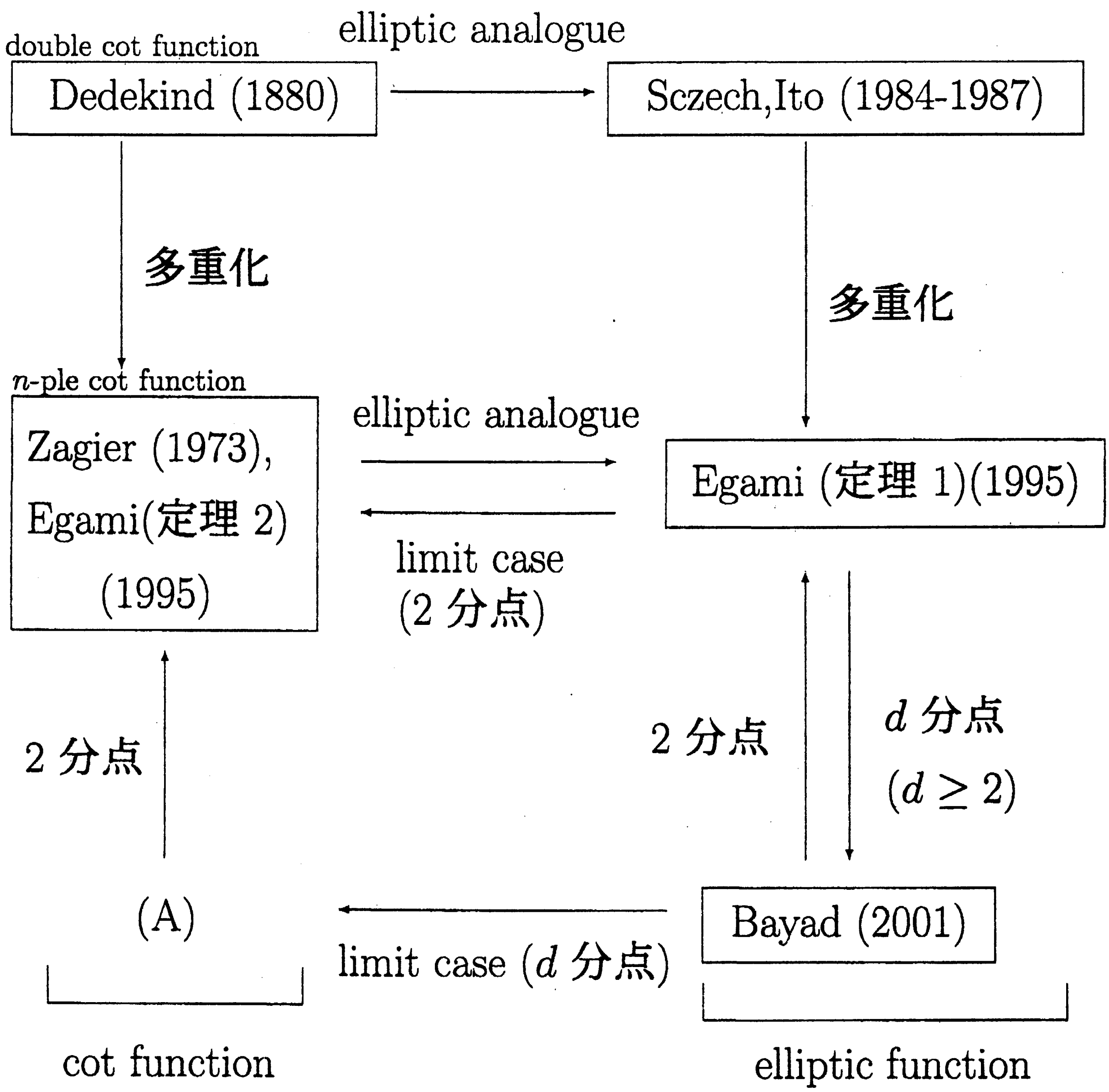
と定義し, 以下の相互法則を得ている:

定理 1 (Zagier[6]). $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を $n+1$ 個の自然数 (n: 偶数) で 2 つずつ互いに素であるとすると,

$$\sum_{j=0}^{n} d(a_j; a_0, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n) = 1 - \frac{l_n(a_0, \cdots, a_n)}{a_0 \cdots a_n}$$

が成り立つ. ここで $l_n(a_0, \cdots, a_n)$ は多項式で, $l_n(a_0, \cdots, a_n) = L_k(p_1, \cdots, p_k)$ $\left(k = \frac{n}{2}\right)$ ($p_i : a_0^2, \cdots, a_n^2$ の i 番目の基本対称式) と書き直すことができる. ここで L_k :Hirzebruch の多項式 (位相幾何)[5] である.

そこで 今まで得られているデデキント和 (その相互法則) についてと我々の目的をまとめたのが次の図で表される:



(注意) ただし elliptic analogue とは (多重) デデキント和の cot の所をある楕円関数に置き換えることであり, limit case は一方の多重デデキント和にある極限をとることにより他方の多重デデキント和が導けることを表す.

この図により次の問題が考えられる:

Bayad が用いた多重デデキント和で極限をとれば Egami(定理 2) の一般化が得られ, Zagier の相互法則の一般化が出せるのではないか.

この問題を考えるために Bayad が用いた多重デデキント和について説明する.

2 Bayad の多重デデキント和

$\tau, z, \varphi \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ とし, $q_\tau = e^{2\pi i\tau}, q_z = e^{2\pi iz}, L = [\tau, 1]$: 複素格子とする. このときヤコビ θ 関数を

$$\theta_\tau(z) := q_\tau^{\frac{1}{8}}(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}) \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q_\tau^n)(1 - q_\tau^n e^z)(1 - q_\tau^n e^{-z})$$

と定義する. この $\theta_\tau(z)$ を用い Bayad[2] は以下でヤコビ形式 $D_\tau(z;\varphi)$ を定義した:
$L = [\tau, 1], \operatorname{Im}\tau > 0$ に対し,

$$D_L(z;\varphi) = D_\tau(z;\varphi) := 2\pi i\, q_z^{\frac{\operatorname{Im}\varphi}{\operatorname{Im}\tau}} \frac{\theta'_\tau(0)\theta_\tau(u+v)}{\theta_\tau(u)\theta_\tau(v)}, \quad (z, \varphi \in \mathbb{C} - L)$$

と定義する. ここで $u = 2\pi iz$, $v = 2\pi i\varphi$ である.

Bayad はこれを用い, 次のように多重デデキント和を構成した:
$p, a_1, \cdots, a_n$ を 2 つずつ互いに素な自然数とする. また
$E_p = \{x\tau + y\ ;\ (x, y) \neq (0, 0),\ 0 \leq x, y \leq p-1,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, $E_L(\omega, \varphi) = \frac{\operatorname{Im}(\overline{\omega}\varphi)}{\operatorname{Im}\tau}$ とおく. そのとき多重デデキント和を

$$d_\tau(p; a_1, \cdots, a_n; \varphi) := \frac{1}{p} \sum_{\omega \in E_p} \exp(2\pi i E_L(\omega, \varphi)) \times D_\tau\left(\frac{a_1\omega}{p}; \varphi\right) \cdots D_\tau\left(\frac{a_n\omega}{p}; \varphi\right)$$

と定義する. Bayad はこの d_τ の相互法則を以下で得ている.

定理 2 (Bayad[2]). $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を 2 つずつ互いに素な自然数で，
d を $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ の約数　とする．
この時，$\mathbb{C}/L$ の 0 でない d 分割の点 φ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} d_\tau(a_k; a_0, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n; \varphi) = -\frac{M_{n,\tau}(a_0; a_1, \cdots, a_n; \varphi)}{a_0 \cdots a_n}$$

が成り立つ．ここで $M_{n,\tau}(a_0; a_1, \cdots, a_n; \varphi)$ は $\prod_{k=0}^{n}(a_k z) D_\tau(a_k z; \varphi)$ の展開の z^n の係数である．

注意 3. $\frac{1}{2\pi i} D_\tau\left(\frac{z}{2\pi i}; \frac{1}{2}\right) = \varphi'(\tau, z)$: Egami[4] のヤコビ形式，
$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n p\, d_\tau\left(p; a_1, \cdots, a_n; \frac{1}{2}\right)$
$= D'_\tau(p; a_1, \cdots, a_n)$: Egami[4] の多重デデキント和
と一致する．

この D'_τ の相互法則を出したのが以下の Egami(定理 1)[4] である．

定理 4 (Egami(定理 1)[4]). $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を 2 つずつ互いに素な自然数とし，$a_0 + \cdots + a_n$ が偶数であるとする．そのとき

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} D'_\tau(a_k; a_0, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n) = -\frac{M_{n,\tau}(a_0, \cdots, a_n)}{a_0 \cdots a_n}$$

が成り立つ．ここで $M_{n,\tau}(a_0, \cdots, a_n)$ は $\prod_{k=0}^{n}(a_k z)\varphi'(\tau, a_k z)$ の z^n の係数である．

よってこのことから Egami(定理 1) は Bayad の $\varphi = \frac{1}{2}$ (2 分点) のときの結果とみなすことができる．

3 結果について

そこで Egami(定理 2)[4] の証明を参考にして Bayad の多重デデキント和 d_τ の極限をとることにより次の結果を得た．

定理 5. $p, a_1, \cdots, a_n$ は自然数で 2 つずつ互いに素であるとする. d を 2 以上の自然数とする. そのとき d 分点 $\frac{m}{d}\,(m \in \mathbb{N}, d \nmid m)$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} p\, d_\tau\left(p; a_1, \cdots, a_n; \frac{m}{d}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2i}\right)^n \sum_{n'=1}^{p-1} \prod_{q=1}^{n} \left(\cot \pi \left(\frac{m}{d}\right) + \cot \pi \left(\frac{a_q n'}{p}\right)\right) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{\xi^m - 1}\right)^n p \sum_{m'=1}^{p-1} (\xi^{-mm'}) \prod_{k=1}^{n} (\xi^{-m})^{\left[\frac{a_k m'}{p}\right]}
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\xi = e^{2\pi i \frac{1}{d}}$ とする.

注意 6. $\cot \pi \left(\frac{m}{d}\right) = 0 \quad \left(\frac{m}{d} = \frac{1}{2}\right)$ ならば上の結果は Egami(定理 2)[4] となる.

さらに, τ に関しては次の定理が成り立つ.

定理 7. 条件は 定理5 と同じとする. そのとき d 分点 $\frac{m\tau}{d}\,(m \in \mathbb{N}, d \nmid m)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} p d_\tau\left(p; a_1, \cdots, a_n; \frac{m\tau}{d}\right) \\
&= \sum_{n'=1}^{p-1} (\xi^{n'm}) \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{d} \cdot \frac{a_k n'}{p}}}{e^{2\pi i \frac{a_k n'}{p}} - 1} \\
&= \sum_{n'=1}^{p-1} (\xi^{n'm}) \prod_{k=1}^{n} \sum_{t=0}^{\infty} B_t\left(\frac{m}{d}\right) \frac{\left(2\pi i \frac{a_k n'}{p}\right)^{t-1}}{t!}
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $m > d$ のときは
$d_\tau\left(p; a_1, \cdots, a_n; \frac{m\tau}{d}\right) = d_\tau\left(p; a_1, \cdots, a_n; \frac{r\tau}{d}\right)\ (m = df + r,\ 1 \le r \le d-1)$ として極限をとる. また $B_n(x)$ は $\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$. で定義されるベルヌーイ多項式を表す.

次に Zagier の相互法則の一般化を考えることにする. そこで 定理5 の右辺の第 1 項目を $K\left(p; a_1, \cdots, a_n; \frac{m}{d}\right)$ とおく. そのとき定理 1 と [3] の系 5.5 の式を解析接続した式 を用いて 次の定理を得た.

定理 8. $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を 2 つずつ互いに素な自然数とする．$d|(a_0+a_1+\cdots+a_n)$ とする ($d \geq 2$)．n を偶数とする．そのとき d 分点 $\frac{m}{d}$ ($m \in \mathbb{N}$, $d \nmid m$) に対し,

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} d_\tau\left(a_k; a_0, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n; \frac{m}{d}\right)$$
$$= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} \frac{M_{n,\tau}\left(a_0; a_1, \cdots, a_n; \frac{m}{d}\right)}{a_0\cdots a_n}$$

は l_i ($i = 2, 4, \cdots, n$) の和と ξ に関する項で表される．ここで $\xi = e^{2\pi i\frac{1}{d}}$ である．

$1 - \frac{l_i(a_{m_0}, \cdots, a_{m_i})}{a_{m_0}\cdots a_{m_i}} = l'_i(a_{m_0}, \cdots, a_{m_i})$ $\quad (0 \leq m_0 < \cdots < m_i \leq n,\ i = 2, 4, \cdots, n)$, $c = \cot\pi\left(\frac{m}{d}\right)$ と書くことにすると, 実際には

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} d_\tau\left(a_k; a_0, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n; \frac{m}{d}\right)$$
$$= \frac{1}{2^n}\left\{ l'_n(a_0, \cdots, a_n) - c^2 \sum_{0\leq m_1<\cdots<m_{n-2}<m_{n-1}\leq n} l'_{n-2}(a_{m_1}, \cdots, a_{m_{n-2}}, a_{m_{n-1}}) \right.$$
$$+ c^4 \sum_{0\leq m_1<\cdots<m_{n-4}<m_{n-3}\leq n} l'_{n-4}(a_{m_1}, \cdots, a_{m_{n-4}}, a_{m_{n-3}}) + \cdots$$
$$\left. +(i)^{n-2}c^{n-2} \sum_{0\leq m_1<m_2<m_3\leq n} l'_2(a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}) \right\} + \left(\frac{1}{2i}\right)^n \cdot c^n \cdot \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{1}{a_k}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{\xi^m - 1}\right)^{n+1} \cdot \left(\xi^{m(n+1)} - 1\right)$$

となる．この定理 8 より 次のように Zagier の相互法則の一般化が得られる．

系 9. $a_0, a_1, \cdots, a_n$ は 2 つずつ互いに素な自然数とする．d を 2 以上の自然数とし，n を偶数とする．そのとき d 分割の点 $\frac{m}{d}$ $(m \in \mathbb{N}, d \nmid m)$ に対し，

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} K\left(a_k; a_0, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n; \frac{m}{d}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}\left\{ l'_n(a_0, \cdots, a_n) - c^2 \sum_{0 \leq m_1 < \cdots < m_{n-2} < m_{n-1} \leq n} l'_{n-2}(a_{m_1}, \cdots, a_{m_{n-2}}, a_{m_{n-1}}) \right.$$

$$\left. + \cdots + (i)^{n-2} c^{n-2} \sum_{0 \leq m_1 < m_2 < m_3 \leq n} l'_2(a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}) \right\}$$

$$+ \left(\frac{1}{2i}\right)^n \cdot c^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right)$$

が成り立つ．

注意 10. $\frac{m}{d} = \frac{1}{2}$ のとき系 9 は定理 1 である．

$\frac{m}{d} = \frac{1}{2}$ のときには l_n と Egami(定理 1)[4] との関係も以下のように得られる．

系 11. 条件は定理 8 と同じとする．そのとき $d = 2, m = 1$ に対して，

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \lim_{\mathrm{Im}\,\tau \to \infty} d_\tau \left(a_k; a_0, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n; \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\lim_{\mathrm{Im}\,\tau \to \infty} \frac{M_{n,\tau}(a_0, a_1, \cdots, a_n)}{a_0 \cdots a_n} = -\frac{1}{2^n} \cdot \frac{l_n(a_0, \cdots, a_n)}{a_0 \cdots a_n}$$

が成り立つ．ここで $M_{n,\tau}$ は Egami(定理 1)[4] で現れる関数である．

このように Zagier の一般化が得られたが，その応用はこれからの課題である．l_n と $M_{n,\tau}$ との関係式を得たことから幾何的な応用が得られるかもしれないが，その面も含めて検討中である．

省略した証明などについては現在投稿中の論文 [1] を見よ．

参考文献

[1] M.Asano, A generalization of the reciprocity law of multiple Dedekind sums, preprint.

[2] A.Bayad, Sommes de Dedekind elliptiques et formes de Jacobi, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **51**,1(2001), 29-42.

[3] B.C.Berndt, U.Dieter, Sums involving the greatest integer function and Riemann-Stieltjes integration, *J. Reine Angew. Math.* **337** (1982), 208-220.

[4] S.Egami, An elliptic analogue of multiple Dedekind sums, *Compositio Math.*, **99**(1995), 99-103.

[5] F.Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, Third Enlarged Edition, *Berlin-Heidelberg-New York, Springer*, 1966.

[6] D.Zagier, Higher order Dedekind sums, *Math. Ann.*, **202**(1973), 149-172.